Teoria da Decisão

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 1

Versão 2

Maria Antónia Carravilla – FEUP

Decisões

A incerteza é muito mais a regra que a excepção, a única coisa que pode ser certa é o passado e as decisões tomam-se para o futuro.

Uma decisão é uma alocação de recursos, é irrevogável e só pode ser alterada por uma outra decisão

Slide 2

Teoria da Decisão

A Teoria da Decisão trata de:

tomada de decisões racionais e consistentes em situações de incerteza, fornecendo um conjunto de conceitos e técnicas para apoio do decisor.

O objectivo da Teoria da Decisão é:

Slide 3

apoiar a escolha de uma acção (ou de uma estratégia) que seja consistente com as alternativas, a informação, os valores e a lógica do decisor **no momento** da tomada de decisão.

Características de um problema de decisão

Slide 4

Decisor O decisor é o responsável pela tomada de decisões. Pode ser um único indivíduo, um grupo, uma empresa ou mesmo uma nação[a].

Acções O decisor deve conseguir construir uma lista exaustiva e mutuamente exclusiva de todas acções alternativas. Sempre que for possível obter uma melhor informação, o decisor deve escolher a melhor fonte de informação e a melhor estratégia[b] global a seguir.

Estados da natureza Acontecimentos que podem ocorrer e que não podem ser controlados pelo decisor. Os estados da natureza devem ser mutuamente exclusivos e devem descrever exaustivamente todas as situações possíveis[c].

Consequências As consequências são as medidas do benefício obtido pelo decisor. As consequências dependem da decisão tomada e dos estados da natureza. Pode-se então associar a cada par (decisão tomada, estado da natureza) um valor correspondente à consequência para o decisor[d].

[a]Neste texto trataremos apenas de situações em que o indivíduo ou o grupo têm objectivos unitários e por isso que as decisões são realmente individuais

[b]Uma estratégia é um conjunto de regras de decisão que indicam, face a uma dada observação da fonte de informação, qual a acção a realizar.

[c]Só pode ocorrer um e um só estado da natureza.

[d]O valor associado a esse par corresponde a uma Função Utilidade, que por vezes corresponde directamente a valores monetários associados a cada consequência.

SOFAfOfOsofa

Slide 5

A marca de sofás SOFAfOfOsofa é um “franchising” de venda de sofás que tem como “força propulsora” para as suas vendas a inovação nos materiais e no design e a qualidade e facilidade de manutenção dos seus sofás.

Recentemente surgiu no mercado mundial um novo tipo de estofo, obtido a partir de estudos de materiais feitos pela *Agência Espacial Africana*. Esse novo estofo, que tem ainda o nome de código *X@K*, tem todas as características da pele natural, mas não absorve gorduras e não se desgasta. O preço dessa matéria prima é muito elevado e a sua produção é ainda muito reduzida.

Os administradores da SOFAfOfOsofa pretendem estar sempre na frente da inovação em sofás e por isso consideram crucial para a empresa a aposta em *X@K*. A decisão a tomar é quanto à quantidade a comprar. Dado que esse estofo tem que ser transportado a partir da costa oriental de África, onde está localizada a *Agência Espacial Africana*, o transporte terá que ser feito por mar e em contentores e só se admite a compra de 1, 2 ou 3 contentores de *X@K* [a]. A aquisição terá que ser feita agora e só no início do próximo ano é que se poderá voltar a comprar esse material.

[a]Devido às condições especiais de embalagem, cada contentor transporta $100.000m^2$ de *X@K*.

SOFAfOfOsofa (cont.)

Slide 6

Se for comprado 1 contentor, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $22um$, comprando-se 2 contentores, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $20um$ e comprando 3 contentores, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $18um$. O preço de venda de $1m^2$ será $25um$, mas se ao fim do ano ainda restar $X@K$, este terá que ser vendido por $10um$ por m^2.

Cada m^2 de material não vendido por ruptura de stocks implica um prejuízo de $5um$.

A administração considera que se poderão vender sofás que consumam $100.000m^2$, $150.000m^2$ ou $250.000m^2$ de $X@K$. Os três tipos de procura teriam probabilidades de ocorrência de respectivamente, 30%, 50% e 20%.

SOFAfOfOsofa -uma questão de decisões

Slide 7

Para o problema da SOFAfOfOsofa defina:

1. O decisor
2. As acções
3. Os estados da natureza
4. As consequências

SOFAfOfOsofa -resposta

Slide 8

Decisor O decisor é a administração da SOFAfOfOsofa.

Acções As acções alternativas são:

- Comprar 1 contentor (100.000m^2 de $X@K$);
- Comprar 2 contentores (200.000m^2 de $X@K$);
- Comprar 3 contentores (300.000m^2 de $X@K$).

Estados da natureza Os estados da natureza que podem ocorrer são:

- Procura de 100.000m^2 de $X@K$;
- Procura de 150.000m^2 de $X@K$;
- Procura de 250.000m^2 de $X@K$.

Consequências Há uma consequência associada a cada par (acção, estado da natureza). Neste caso se por exemplo se optar por comprar 2 contentores e a procura for de 150.000m^2 de $X@K$, então o lucro para a empresa será:

$150.000m^2 \times 25\frac{um}{m^2} + 50.000m^2 \times 10\frac{um}{m^2} - 200.000m^2 \times 20\frac{um}{m^2} = 250.000um$

Matriz de Decisão

Depois de definidas todas as acções alternativas e todos os estados da natureza, deve ser possível associar a cada par (acção, estado da natureza) uma consequência que terá um valor correspondente à utilidade para o decisor.

$$U_{ij} = U(a_i; \theta_j)$$

Slide 9

Com esses valores pode-se preencher uma tabela de duas entradas a que se chama "*Matriz de Decisão*".

	Estados da natureza				
Acções	θ_1	θ_2	θ_3	$\dots$	θ_n
a_1	U_{11}	U_{12}	U_{13}	$\dots$	U_{1n}
a_2	U_{21}	U_{22}	U_{23}	$\dots$	U_{2n}
a_3	U_{31}	U_{32}	U_{33}	$\dots$	U_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	U_{m1}	U_{m2}	U_{m3}	$\dots$	U_{mn}

SOFAfOfOsofa - *Matriz de Decisão*

Problema:

Construa a *Matriz de Decisão* para o problema da SOFAfOfOsofa.

Solução:

Slide 10 A *Matriz de Decisão* para o problema da SOFAfOfOsofa está representada na tabela seguinte (valores apresentados em *kum*).

	Estados da natureza		
Acções	Procura de 100.000m^2 de $X@K$	Procura de 150.000m^2 de $X@K$	Procura de 250.000m^2 de $X@K$
Comprar 100.000m^2 de $X@K$	300	50	-450
Comprar 200.000m^2 de $X@K$	-500	250	750
Comprar 300.000m^2 de $X@K$	-900	-150	1350

Decisão com informação perfeita

Ou por outras palavras, o decisor sabe qual dos estados da natureza vai ocorrer. Nesse caso escolherá a decisão que maximiza e utilidade.

Considerando que vai ocorrer o estado da natureza θ_0, a acção a_0 a tomar será então:

$$a_0 : U(a_0, \theta_0) = max_{a_i} U(a_i, \theta_0)$$

Slide 11 No exemplo da SOFAfOfOsofa:

- Se o decisor souber que a procura será de 100.000m^2, então opta por comprar 100.000m^2 de $X@K$.
- Se o decisor souber que a procura será de 150.000m^2, então opta por comprar 200.000m^2 de $X@K$.
- Se o decisor souber que a procura será de 250.000m^2, então opta por comprar 300.000m^2 de $X@K$.

Decisão e incerteza

A incerteza é muito mais a regra que a excepção, a única coisa que pode ser certa é o passado e as decisões tomam-se para o futuro.

Slide 12

Um decisor que não conhece qual o estado da natureza que vai ocorrer terá que ter critérios para tomar decisões. Esses critérios podem ser:

- não probabilísticos;
- probabilísticos (dependentes da probabilidade de ocorrência dos estados da natureza).

Acções admissíveis e inadmissíveis

Slide 13

Por vezes é possível reduzir a *Matriz de Decisão*, retirando acções que nenhum decisor com bom senso poderia admitir.

Se existe uma acção a_k que é sempre dominada por outra acção a_i [a], então a acção a_k pode ser retirada da *Matriz de Decisão*.

[a]Uma acção a_i domina uma acção a_k se $\forall_{\theta_j} U(a_i, \theta_j) \geq U(a_k, \theta_j)$

SOFAfOfOsofa (continuação alternativa)

Slide 14

Se for comprado 1 contentor, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $20um$, comprando-se 2 contentores, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $18um$ e comprando 3 contentores, o preço de compra de $1m^2$ de $X@K$ será $16um$. O preço de venda de $1m^2$ será $25um$, mas se ao fim do ano ainda restar $X@K$, este terá que ser vendido por metade do preço de custo, $12.5um$ por m^2.

Cada m^2 de material não vendido por ruptura de stocks implica um prejuízo de $5um$.

A administração considera que se poderão vender sofás que consumam $100.000m^2$, $150.000m^2$ ou $250.000m^2$ de $X@K$. Os três tipos de procura teriam probabilidades de ocorrência de respectivamente, 30%, 50% e 20%.

SOFAfOfOsofa - *Matriz de Decisão para continuação alternativa*

Slide 15

	Estados da natureza		
Acções	Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$
Comprar $100.000m^2$ de $X@K$	500	250	-250
Comprar $200.000m^2$ de $X@K$	150	775	1150
Comprar $300.000m^2$ de $X@K$	200	8250	2075
	retirando a acção dominada ...		
Comprar $100.000m^2$ de $X@K$	500	250	-250
Comprar $300.000m^2$ de $X@K$	200	8250	2075

Critérios de decisão não probabilísticos

- Laplace

  Todos os estados da natureza têm uma probabilidade de ocorrência igual.
- Maximin (ou minimax)

  Slide 16 Critério pessimista; natureza hostil; ocorre sempre o estado da natureza que pode prejudicar mais.
- Savage

  Pessimismo moderado, *Matriz de Decisão* é substituída por uma *Matriz de Pesares*.
- Hurwicz

  Definição de um parâmetro que pode variar entre 0 e 1, permitindo assim reflectir atitudes desde pessimista a optimista.

Critérios de decisão não probabilísticos – Laplace

Dado que a probabilidade de ocorrência dos estados da natureza não é conhecida, considera-se que todos os estados da natureza têm uma probabilidade de ocorrência igual. Havendo n estados da natureza, então a probabilidade de ocorrência de cada um deles será $\frac{1}{n}$. A acção a escolher será então:

Slide 17

$$max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U(a_i;\theta_j) \right\}$$

SOFAfOfOsofa – Laplace

Slide 18

Considerando mais uma vez a *Matriz de Decisão* da SOFAfOfOsofa, e usando o critério de decisão de Laplace:

	Estados da natureza			
Acções (compra de $X@K$)	Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U(a_i;\theta_j)$
$100.000m^2$	300	50	-450	$\frac{-100}{3}$
$200.000m^2$	-500	250	750	$\frac{500}{3}$
$300.000m^2$	-900	-150	1350	$\frac{300}{3}$

opta-se pela compra de $200.000m^2$ de $X@K$, a acção que corresponde ao valor máximo de $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U(a_i;\theta_j)$ ($\frac{500}{3}$ neste caso).

Critérios de decisão não probabilísticos – Maximin

Slide 19

Critério pessimista em que se considera que a natureza é hostil e que por isso ocorrerá sempre o estado da natureza que pode prejudicar mais. A acção a escolher será então:

$$max_{a_i}\left\{min_{\theta_j} U(a_i;\theta_j)\right\}$$

SOFAfOfOsofa – Maximin

Slide 20

Considerando mais uma vez a *Matriz de Decisão* da SOFAfOfOsofa, e usando o critério de decisão Maximin:

Acções (compra de $X@K$)	Estados da natureza: Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	$min_{\theta_j} U(a_i;\theta_j)$
$100.000m^2$	300	50	-450	-450
$200.000m^2$	-500	250	750	-500
$300.000m^2$	-900	-150	1350	-900

opta-se pela compra de $100.000m^2$ de $X@K$, a acção que corresponde ao valor máximo de $min_{\theta_j} U(a_i;\theta_j)$ (-450 neste caso).

Critérios de decisão não probabilísticos – Savage

O critério de Savage chama-se também critério da perda de oportunidade minimax (ou pesar minimax). Este critério baseia-se no critério de Maximin, mas é mais moderado, tendo sido criado pelo seguinte:

Slide 21

Uma vez decidida a acção a realizar e ocorrido o estado da natureza, o decisor sente pesar por não ter optado pela melhor acção. E é esse pesar que se pretende minimizar.

Para aplicar o critério de Savage, é necessário transformar a *Matriz de Decisão* numa *Matriz de Pesares*, usando a seguinte transformação:

$$P(a_i;\theta_j) = max_{a_k} \{U(a_k;\theta_j)\} - U(a_i;\theta_j)$$

e aplicar seguidamente o critério de Minimax à *Matriz de Pesares*.

$$min_{a_i} \{max_{\theta_j} P(a_i;\theta_j)\}$$

SOFAfOfOsofa – Savage

Considerando mais uma vez a *Matriz de Decisão* da SOFAfOfOsofa, transforme-se a matriz numa *Matriz de Pesares* e aplique-se o critério Minimax:

Slide 22

Acções (compra de $X@K$)	Estados da natureza Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	$max_{\theta_j} P(a_i;\theta_j)$
$100.000m^2$	0	200	1800	1800
$200.000m^2$	800	0	600	800
$300.000m^2$	1200	400	0	1200

Seguindo este critério, a compra de $200.000m^2$ de $X@K$ é a acção escolhida, dado que corresponde ao valor mínimo de $max_{\theta_j} P(a_i;\theta_j)$ (800 neste caso).

Critérios de decisão não probabilísticos – Hurwicz

O critério de Hurwicz pretende reflectir todas as atitudes do decisor, desde muito optimista a muito pessimista. Define-se para tal um parâmetro $0 \leq \alpha \leq 1$ a que se chama índice de optimismo.

A acção a escolher é obtida do seguinte modo:

$$max_{a_i} \left\{\alpha \times max_{\theta_j} U(a_i;\theta_j) + (1-\alpha) \times min_{\theta_j} U(a_i;\theta_j)\right\}$$

Slide 23

Se $\alpha = 0$ este critério corresponde à aplicação do critério de Maximin, se $\alpha = 1$, corresponde a um decisor 100% optimista.

Critérios de decisão probabilísticos

Os critérios de decisão probabilísticos baseiam-se na incorporação da informação à priori que o decisor tem sobre os estados da natureza. Essa incorporação de informação corresponde à atribuição de probabilidades de ocorrência aos estados da natureza.

Abordaremos a seguir dois critérios de decisão probabilísticos:

Slide 24

- Maximização do valor esperado;
- Minimização da perda de oportunidade esperada [a].

[a] Para aplicar este critério é necessário começar por construir a *Matriz de Pesares*, tal como se apresentou no critério não probabilístico de Savage.

Critérios de decisão probabilísticos – Maximização do valor esperado (MVE) [a]

Este critério de decisão baseia-se na escolha da acção que maximiza a utilidade esperada. Para tal é necessário:

Slide 25

1. atribuir uma probabilidade $h(\theta_j)$ [b] de ocorrência a cada um dos estados da natureza θ_j (que se consideram mutuamente exclusivos), de tal forma que a soma das probabilidades de ocorrência seja igual a um, $(\sum_j h(\theta_j) = 1)$;
2. calcular o valor esperado de cada acção:
$$\forall_{a_i} \quad VE_{a_i} = \textstyle\sum_j \{h(\theta_j) \times U(a_i;\theta_j)\}$$
3. escolher a acção a_0 que maximiza o valor esperado:
$$a_0 : \max_{a_i} \{VE_{a_i}\}$$

[a] Também conhecido por critério de Bayes ou por critério de decisão à priori.
[b] Conhecida por probabilidade de ocorrência à priori.

– Maximização do valor esperado (MVE)

Considerando os possíveis estados da natureza e repectivas probabilidades de ocorrência, tal como se representam na primeira linha da tabela seguinte, e ainda os valores de $U(a_i; \theta_j)$, obtem-se o máximo valor esperado.

Slide 26

	Estados da natureza			
	Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	
$h(\theta_j)$	0.30	0.50	0.20	
a_i				VE_{a_i}
Comprar $100.000m^2$ de $X@K$	300	50	-450	25
Comprar $200.000m^2$ de $X@K$	-500	250	750	125
Comprar $300.000m^2$ de $X@K$	-900	-150	1350	-75

opta-se pela compra de $200.000m^2$ de $X@K$, a acção que corresponde ao máximo valor esperado (125 neste caso).

– Minimização da perda de oportunidade esperada

Considerando os possíveis estados da natureza e respectivas probabilidades de ocorrência, tal como se representam na primeira linha da tabela seguinte, e ainda os valores de $P(a_i; \theta_j)$, obtém-se a mínima perda de oportunidade esperada.

Slide 27

	Estados da natureza			
	Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	
$h(\theta_j)$	0.30	0.50	0.20	
a_i				POE_{a_i}
Comprar $100.000m^2$ de $X@K$	0	200	1800	460
Comprar $200.000m^2$ de $X@K$	800	0	600	360
Comprar $300.000m^2$ de $X@K$	1200	400	0	560

Opta-se pela compra de $200.000m^2$ de $X@K$, a acção que corresponde à mínima perda de oportunidade esperada (360 neste caso).

Árvores de decisão

A árvore de decisão é uma forma alternativa de estruturação de um problema de decisão.

As árvores de decisão são muito úteis para representar problemas de decisão complexos, com sequências de acções e estados da natureza que ocorrem ao longo do tempo.

Slide 28

Nós da árvore de decisão

- nós de decisão (assinalados com quadrados) – escolha do caminho feita pelo decisor (acções escolhidas pelo decisor)
- nós causais (assinalados com círculos) – caminho determinado por factores que o decisor não controla (estados da natureza)

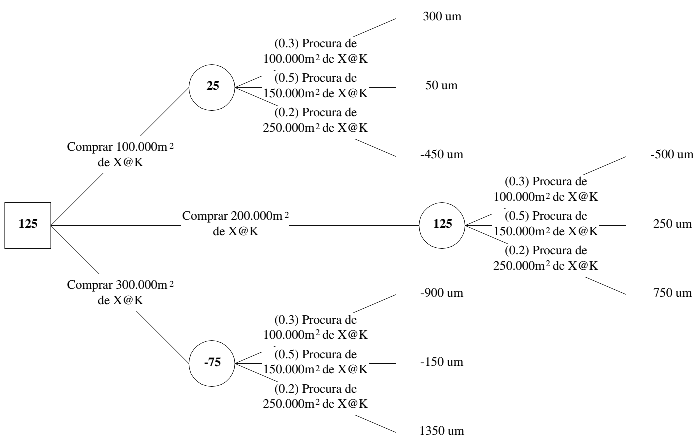
SOFAfOfOsofa - Árvore de decisão

Questão:

Desenhe a árvore de decisão para o problema da SOFAfOfOsofa, onde deve indicar todas as acções, estados da natureza e suas probabilidades de ocorrência e consequências.

Slide 29

Resposta:



SOFAfOfOsofa - Proposta de alargamento

Recentemente foi feita à SOFAfOfOsofa uma proposta de alargamento do seu franchising para outros países da Europa. Se o negócio correr bem, há a possibilidade de a empresa ter lucros elevados.

Slide 30 O período a considerar para o alargamento do franchising será de 2 anos. No início de cada um dos anos será necessário tomar decisões de alargamento, que poderá ser total (todos os países da Europa) ou então parcial, começando-se pelos países mais próximos e alargando numa segunda fase (no ano seguinte) aos restantes países.

Os custos de alargamento estão representados na tabela seguinte (em *Mum*):

	Ano 1	Ano 2
Alargamento total	2	3
Alargamento parcial 1	1	1.5
Alargamento parcial 2	–	2

SOFAfOfOsofa - Proposta de alargamento (cont.)

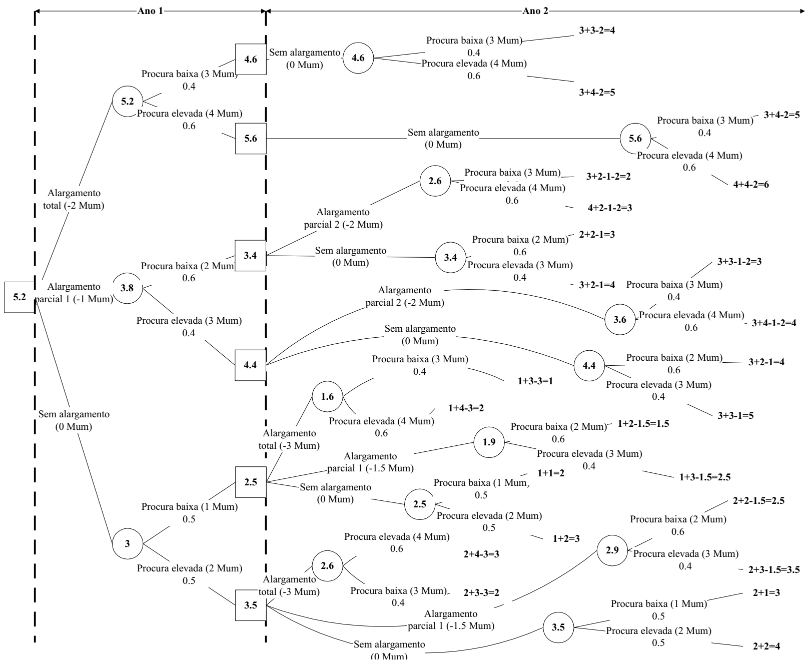
Evidentemente que os resultados do alargamento em estudo dependem fortemente da dimensão do mercado potencial. Para conhecer as hipóteses de sucesso de cada uma das opções, foram consultados especialistas no mercado europeu. A esses especialistas foi indicado que considerassem apenas duas possibilidades para o mercado, *procura elevada* e *procura baixa*.

Slide 31 O resultado do estudo realizado pelos técnicos, está representado na tabela seguinte:

	$P(\theta_i)$		Lucros (em *Mum* por ano)	
a_i	Procura baixa	Procura elevada	Procura baixa	Procura elevada
Alargamento total	0.4	0.6	3	4
Alargamento parcial 1	0.6	0.4	2	3
Não alargamento	0.5	0.5	1	2

SOFAfOfOsofa - Proposta de alargamento (árvore de decisão)

Slide 32



Informação adicional

Até agora consideramos situações em que o decisor escolhe entre acções alternativas com base apenas na informação que possui à priori sobre o problema e sem tentar obter nenhuma informação adicional.

Questões que se colocam nesta fase:

Slide 33

- Vale ou não a pena obter informação adicional?
- Que informação adicional obter?
- Que estratégia seguir depois de conhecida a informação adicional?
- Quanto pode valer a informação adicional[a]?

[a]Ou de outra forma, até quanto estamos dispostos a pagar pela informação adicional?

Valor esperado da informação perfeita (VEIP)

Na ausência de dados sobre a credibilidade do fornecedor de informação, não é possível atribuir valor a essa informação. Pode-se no entanto determinar o aumento esperado do Valor Esperado se a informação for perfeita, que é realmente um limite superior para esse valor.

Esse limite superior é conhecido por Valor Esperado da Informação Perfeita

Slide 34 (*VEIP*), e pode ser obtido de três formas diferentes:

1. subtraindo o Máximo Valor Esperado (com incerteza), do Máximo Valor Esperado (com informação perfeita);
2. por uma "análise incremental";
3. calculando o valor mínimo para a perda de oportunidade esperada.

VEIP – Método 1

Máximo Valor Esperado (informação perfeita) - Máximo Valor Esperado (incerteza)

$$\sum_j h(\theta_j) \times max_{a_i} U(a_i, \theta_j) - max_{a_i} \left\{ \sum_j h(\theta_j) \times U(a_i, \theta_j) \right\}$$

Slide 35

	Estados da natureza			
	Procura de $100.000m^2$ de $X@K$	Procura de $150.000m^2$ de $X@K$	Procura de $250.000m^2$ de $X@K$	MVE_{ip}
$h(\theta_j)$	0.30	0.50	0.20	
$max_{a_i} U(a_i, \theta_j)$	300	250	1350	485

Considerando o máximo valor esperado (MVE) calculado anteriormente:

$VEIP = MVE_{ip}$ - MVE = 485 - 125 = 360

VEIP – Análise incremental

Partindo novamente do exemplo da , consideremos a acção escolhida pelo critério do Máximo Valor Esperado, "Comprar 200.000m^2 de $X@K$".

Para cada um dos estados da natureza que podem ocorrer, podemos calcular a diferença entre a maior utilidade e a utilidade associada à acção escolhida. Seguidamente somam-se os produtos dessas diferenças pelas probabilidades

Slide 36 de ocorrência dos respectivos estados da natureza:

	Estados da natureza			
	Procura de 100.000m^2 de $X@K$	Procura de 150.000m^2 de $X@K$	Procura de 250.000m^2 de $X@K$	*VEIP*
$h(\theta_j)$	0.30	0.50	0.20	
$max_{a_i} U(a_i, \theta_j)$	300	250	1350	
$U(a_2, \theta_j)$ (acção escolhida por MVE)	-500	250	750	
$max_{a_i} U(a_i, \theta_j) - U(a_2, \theta_j)$	800	0	600	360

VEIP = Minimização da perda de oportunidade esperada

Considerando os possíveis estados da natureza e respectivas probabilidades de ocorrência, tal como se representam na primeira linha da tabela seguinte, e ainda os valores de $P(a_i; \theta_j)$, obtém-se a mínima perda de oportunidade esperada.

Slide 37

	Estados da natureza			
	Procura de 100.000m^2 de $X@K$	Procura de 150.000m^2 de $X@K$	Procura de 250.000m^2 de $X@K$	
$h(\theta_j)$	0.30	0.50	0.20	
a_i				POE_{a_i}
Comprar 100.000m^2 de $X@K$	0	200	1800	460
Comprar 200.000m^2 de $X@K$	800	0	600	360
Comprar 300.000m^2 de $X@K$	1200	400	0	560

VEIP = Minima perda de oportunidade esperada (360 neste caso).

Informação perfeita ou imperfeita?

A eliminação da incerteza através da aquisição de informação perfeita:

- não é praticável;
- não se pode fazer em tempo útil;
- não se pode fazer de forma económica.

Slide 38

Pode-se obter informação adicional (imperfeita):

- através da realização de experiências
- através da realização de inquéritos.

No entanto, não convém esquecer que:

$$\text{informação inicial} + \text{informação adicional} \leq \text{informação perfeita}$$

Matriz de "credibilidade"

A *Matriz de "credibilidade"* corresponde a uma medida da credibilidade da experiência realizada ou do consultor ouvido.

Considerando $P(r_k|\theta_j)$ como a probabilidade de a experiência realizada ter resultado r_k, dado que o estado da natureza é θ_j

Slide 39

Resultados	Estados da natureza				
da experiência	θ_1	θ_2	θ_3	$\dots$	θ_J
r_1	$P(r_1\|\theta_1)$	$P(r_1\|\theta_2)$	$P(r_1\|\theta_3)$	$\dots$	$P(r_1\|\theta_J)$
r_2	$P(r_2\|\theta_1)$	$P(r_2\|\theta_2)$	$P(r_2\|\theta_3)$	$\dots$	$P(r_2\|\theta_J)$
r_3	$P(r_3\|\theta_1)$	$P(r_3\|\theta_2)$	$P(r_3\|\theta_3)$	$\dots$	$P(r_3\|\theta_J)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
r_K	$P(r_K\|\theta_1)$	$P(r_K\|\theta_2)$	$P(r_K\|\theta_3)$	$\dots$	$P(r_K\|\theta_J)$
$\sum_k P(r_k\|\theta_j)$	1	1	1	$\dots$	1

Informação perfeita – *Matriz de "credibilidade"*

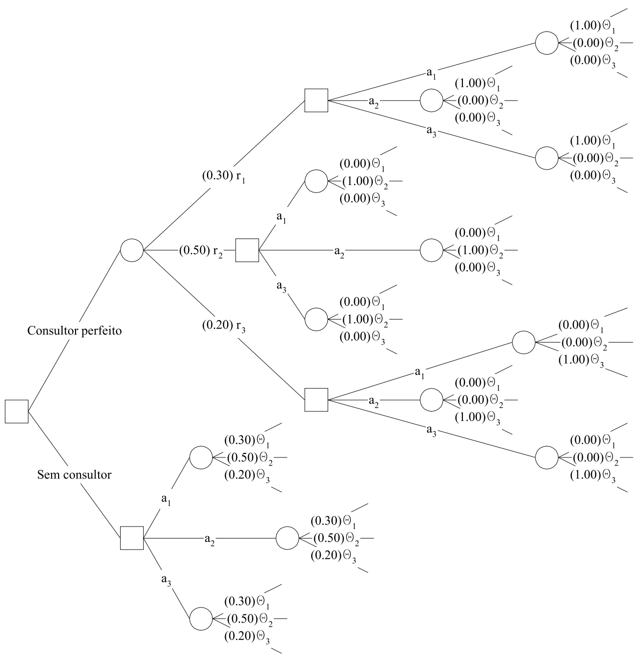
No caso de informação perfeita (credibilidade máxima), considerando que o resultado r_i indicia que ocorrerá o estado da natureza θ_i, a *Matriz de "credibilidade"* será a seguinte:

Slide 40

Resultados	Estados da natureza				
da experiência	θ_1	θ_2	θ_3	$\ldots$	θ_J
r_1	1	0	0	$\ldots$	0
r_2	0	1	0	$\ldots$	0
r_3	0	0	1	$\ldots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
r_J	0	0	0	$\ldots$	1

SOFAfOfOsofa - Informação Perfeita (árvore de decisão)

Slide 41



Ponto da situação:

Slide 42

Conhecemos então:

$P(\theta_j)$ – probabilidade (à priori) de ocorrência do estado da natureza θ_j

conhecemos também:

$P(r_k|\theta_j)$ – probabilidade de a experiência realizada ter resultado r_k, dado que o estado da natureza é θ_j ("credibilidade da experiência")

Mas o que é importante conhecer são as probabilidades de ocorrência dos estados da natureza **após** a informação fornecida pelas experiências (probabilidades de ocorrência à posteriori).

$P(\theta_j|r_k)$ – probabilidade de ocorrência do estado da natureza θ_j, dado que a experiência realizada teve resultado r_k

O *Teorema de Bayes* permite calcular $P(\theta_j|r_k)$ a partir de $P(r_k|\theta_j)$ e de $P(\theta_j)$

SOFAfOfOsofa - Consultadoria externa

Slide 43

Voltando ao problema inicial ... a administração da SOFAfOfOsofa considera que se poderão vender sofás que consumam $100.000m^2$, $150.000m^2$ ou $250.000m^2$ de *X@K*. Com os conhecimentos que os administradores da SOFAfOfOsofa têm sobre o negócio, os três tipos de procura teriam probabilidades de ocorrência de respectivamente, 30%, 50% e 20%.

Na última reunião da administração falou-se na possibilidade de recorrer a uma empresa de consultadoria externa com alguma credibilidade na avaliação do mercado para este tipo de produtos.

Analisando cuidadosamente as avaliações de mercado já realizadas por essa empresa, concluiu-se que, para o problema em causa, a matriz de credibilidade da empresa $P(r_k|\theta_j)$ seria a que se encontra representada na tabela seguinte:

	Estados da natureza		
Resultados da consultadoria	Procura de 100.000m^2 de $X@K$	Procura de 150.000m^2 de $X@K$	Procura de 250.000m^2 de $X@K$
Previsão de procura baixa	0.7	0.5	0.1
Previsão de procura média	0.2	0.5	0.4
Previsão de procura alta	0.1	0.0	0.5

Slide 44

Questão:

Como calcular $P(\theta_j|r_k)$ (probabilidade de ocorrência do estado da natureza θ_j, dado que a experiência realizada teve resultado r_k) a partir desses valores?

Reverendo Thomas Bayes (1702–1761) [a]

Slide 45

Bayes apresentou a sua teoria das probabilidades num ensaio denominado "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances" publicado nas "Philosophical Transactions of the Royal Society of London" em 1764. O artigo foi enviado para a "Royal Society" por Richard Price, um amigo de Bayes, que escreveu:

I now send you an essay which I have found among the papers of our deceased friend Mr Bayes, and which, in my opinion, has great merit... In an introduction which he has written to this Essay, he says, that his design at first in thinking on the subject of it was, to find out a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumstances, upon supposition that we know nothing concerning it but that, under the same circumstances, it has happened a certain number of times, and failed a certain other number of times.

[a] Informação retirada de:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Bayes.html em 2002.03.13

Teorema de Bayes

O *Teorema de Bayes* permite calcular $P(\theta_j|r_k)$ (probabilidade de ocorrência do estado da natureza θ_j dado que o resultado da experiência foi r_k), conhecendo $P(r_k|\theta_j)$ e $P(\theta_j)$.

$$P(\theta_j|r_k) = \frac{P(\theta_j, r_k)}{P(r_k)} = \frac{P(r_k|\theta_j) \times P(\theta_j)}{\sum_j P(r_k|\theta_j) \times P(\theta_j)} \quad (1)$$

Slide 46

Resultados da experiência	$P(r_k)$	Estados da natureza θ_1	θ_2	θ_3	$\dots$	θ_J	$\sum_j P(\theta_j\|r_k)$
r_1	$P(r_1)$	$P(\theta_1\|r_1)$	$P(\theta_2\|r_1)$	$P(\theta_3\|r_1)$	$\dots$	$P(\theta_J\|r_1)$	1
r_2	$P(r_2)$	$P(\theta_1\|r_2)$	$P(\theta_2\|r_2)$	$P(\theta_3\|r_2)$	$\dots$	$P(\theta_J\|r_2)$	1
r_3	$P(r_3)$	$P(\theta_1\|r_3)$	$P(\theta_2\|r_3)$	$P(\theta_3\|r_3)$	$\dots$	$P(\theta_J\|r_3)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
r_K	$P(r_K)$	$P(\theta_1\|r_K)$	$P(\theta_2\|r_K)$	$P(\theta_3\|r_K)$	$\dots$	$P(\theta_J\|r_K)$	1

SOFAfOfOsofa - Consultadoria externa (resolução)

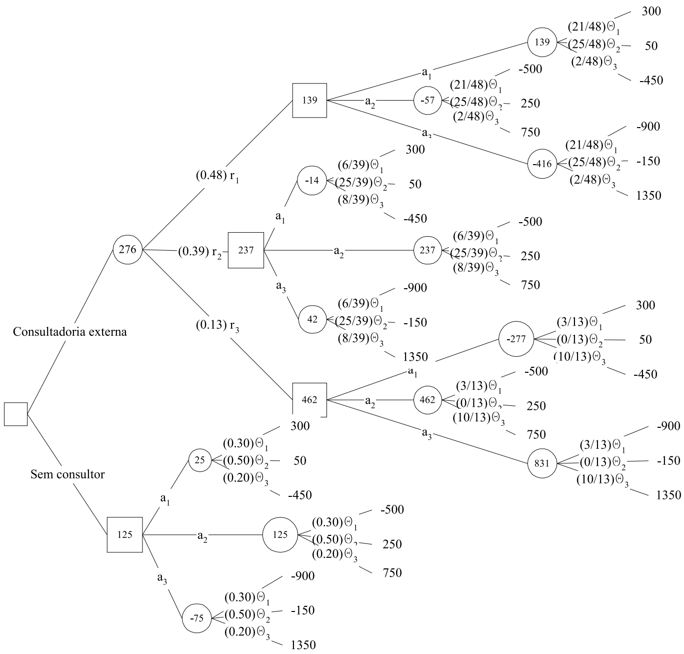
Aplicando o *Teorema de Bayes*, obtêm-se as probabilidades revistas de ocorrência de cada um dos estados da natureza, dados os vários resultados possíveis da experiência, tal como se representam na tabela seguinte:

Slide 47

		Estados da natureza		
Resultados da consultadoria	$P(r_k)$	Procura de 100.000m^2 de *X@K*	Procura de 150.000m^2 de *X@K*	Procura de 250.000m^2 de *X@K*
Previsão de procura baixa	0.48	$\frac{21}{48}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{2}{48}$
Previsão de procura média	0.39	$\frac{6}{39}$	$\frac{25}{39}$	$\frac{8}{39}$
Previsão de procura alta	0.13	$\frac{3}{13}$	$\frac{0}{13}$	$\frac{10}{13}$

SOFAfOfOsofa - Consultadoria externa (árvore de decisão)

Slide 48



Bibliografia

Slide 49

- Hillier, Frederick S. e Lieberman, Gerald (2001). *Introduction to Operations Research*, Mc Graw-Hill.
- Murteira, Bento (1981). *Introdução à Teoria da Decisão.*
- Ravindram, Philips e Solberg (1987). *Operations Research, Principles and Practice.* John Wiley & Sons.
- Taha, Hamdy A. (1997). *Operations Research, an Introduction.* Prentice Hall.
- Winston, Wayne L. (1994). *Operations Research, Applications and Algorithms* Duxbury Press.